代数幾何学シンポジウム記録
1982年度 pp.56-68

楕円曲面に対する局所トレリの定理

京大理 斉藤 政彦

X を2次元コンパクト複素多様体とする。X の正則2形式による"周期"が X のモヂュライをどれだけ記述するかを考える。(トレリの問題)。K-3曲面，複素トーラス，一般型 ($c_1(X)^2 = p_g(X) = 1$) の時は，くわしい研究がなされている。本稿では，楕円曲面に対する周期写像の局所的単射性(局所トレリの定理)について述べたいと思う。又，小平曲面のモヂュライ空間と大域的な周期写像の性質を，若干述べてみる。(§5)

1. Infinitesimal period map.

以下，問題を定式化し，主定理を述べるために Infinitesimal period map を定義する。

X を n 次元コンパクト複素多様体とする。(必らずしも，ケーラーとは仮定しない。) Ω^p_X を X の正則 p 形式の切断の芽のなす層，Θ_X ($\cong \Omega^{1\vee}_X$) を tangent sheaf とする。Contraction map $\Theta_X \otimes \Omega^n_X \longrightarrow \Omega^{n-1}_X$ より，線型写像，$H^1(X, \Theta_X) \otimes H^0(X, \Omega^n_X) \longrightarrow H^1(X, \Omega^{n-1}_X)$ をえる。

これより自然に，次の線型写像 δ が得られる。

$$\delta : H^1(X, \Theta_X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H^0(X, \Omega^n_X), H^1(X, \Omega^{n-1}_X)).$$

又，その双対写像は Serre duality より

$$\mu = (\delta)^* : H^0(X, \Omega^n_X) \otimes H^{n-1}(X, \Omega^1_X) \longrightarrow H^{n-1}(X, \Omega^n_X \otimes \Omega^1_X).$$

によって与えられる。

<u>定義 1.1</u>　δ を X の Infinitesimal period map と呼ぶ。

我々の考える問題は次の問題である。

<u>問題（Infinitesimal Torelli problem）</u>

「どのような X について，δ は単射か決定せよ。」

さて現在まで知られている肯定的な結果を，$n=2$ の時に（筆者の知る限り）述べてみよう。

(1)　$\Omega^2_X \cong \mathcal{O}_X$　すなわち，X : K-3，複素トーラス，小平曲面（§5）

(2)　$\mathbb{P}^2$ や $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の Cyclic covering

(3)　$\mathbb{P}^3$ の超曲面．

又否定的な結果を述べる。

(1)′　$p_g(X) = 0$ かつ $\dim H^1(X, \Theta_X) > 0$ の曲面．

(2′　multiple fibre をもつ楕円曲面．

(3)′　$B^1(X)$ が奇数かつ 5以上の楕円曲面

(4)′　$p_g(X) = c_1(X)^2 = 1$ なるある種の general type.

さて我々は，一般の楕円曲面で，$p_g(X) \geqq 1$，multiple fibre をもたないものについて問題を考え，次の定理をえた。

主定理　$\varphi : X \longrightarrow C$ を，曲線 C 上の楕円曲面で，次をみたすとする。

① X は第1種例外曲線を含まない

② X は multiple fibre をもたない。

③ $p_g(X) \geqq 1$

$J(X)$ で $\varphi : X \longrightarrow C$ の函数不変量（1）を表わす。

δ は次の時，単射である。

(A)　$J(X) \not\equiv$ const.

(B)　$J(X) \equiv$ const. $(\neq 0, 1)$，$C \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

(C)　$J(X) \equiv$ const. $(\neq 0, 1)$ かつ $\chi(X, \mathcal{O}_X) \geqq 3$.

(注)．$J(X) \not\equiv$ const. なる条件は generic である。$J(X) \not\equiv$ const. $C \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ の時，K. Kii（7）によって証明されている。又最近 K. Chakiris（6）は，section を持つ $\mathbb{P}^1$ 上の $p_g(X) \geqq 2$ なる，楕円曲面に対して Weak Global Torelli theorem を証明した。

2. 周期写像の復習.

この§では, Infinitesimal period map δ と, 周期写像の関係を復習しよう. 簡単のため, X は曲面する.

<u>命題 2.1</u>　X : ケーラーとは限らない曲面とする. 又 Q で, $H^2(X,\mathbb{C})$ 上の cup 積を表わす. X の 2nd-cohomology $H^2(X,\mathbb{C})$ は Hodge 構造をもつ. すなわち.

$$H^2(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=2} H^{p,q}(X). \quad H^{p,q} = \overline{H^{q,p}}$$

ただし, $H^{p,q}(X) \cong H^q(X,\Omega^p_X)$.

又 Q に関して $H^{2,0}(X)^\perp = H^{1,1}(X) \oplus H^{2,0}(X)$ が成り立つ. (小平 (3))

$f: \mathcal{X} \longrightarrow S$ を曲面の smooth family とする. この f に対する「Hodge 構造の変形」とは, $(\mathbb{H}^2, \{\mathbb{F}^p\}, \nabla, S)$ という組で次を満すもの.

(1) $\mathbb{H}^2$: S 上の flat $\mathbb{C}$ vector bundle associated with $R^2f_*\mathbb{C}_{\mathcal{X}}$.

(2) ∇ : flat connection on $\mathbb{H}^2$.

(3) $0=\mathbb{F}^3 \subset \mathbb{F}^2 \subset \mathbb{F}^1 \subset \mathbb{F}^0 = \mathbb{H}^2$ は hol. subbundle による filtration.

(4) $\forall s \in S$ $\mathbb{F}^2_s = H^{2,0}(X_s)$, $\mathbb{F}^1_s = H^{2,0}(X_s) \oplus H^{1,1}(X_s)$.

(5) $\nabla : \mathcal{O}(\mathbb{F}^p) \longrightarrow \mathcal{O}(\mathbb{F}^{p-1}) \otimes \Omega^1_S$.

$\mathbb{H}^2$ 上には各 fibre ごとに cup 積をもち, 命題 2.1 より. Hodge 構造は $\mathbb{F}^2$ によって定まる. さて この意味で周期写像

とは、次のように定義される。$s_0 \in S$ を1つ固定し、Sを十分小さく取りかえて、自明化

$$\alpha : \mathbb{H}^2 = \bigcup_{s \in S} H^2(X_s, \mathbb{C}) \longrightarrow S \times H^2(X_{s_0}, \mathbb{C}).$$
$$\| $$
$$\bigcup_s \alpha_s$$

を1つとる。$P_g(X_{s_0}) = k$ とし、

$$D = \{ (V \hookrightarrow H^2(X_{s_0}, \mathbb{C})) \in Gr(k, H^2(X_{s_0}, \mathbb{C})),\ Q(V,V)=0 \}$$

と定める。

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & S & \longrightarrow & D \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & s & \longmapsto & (\alpha_s(H^{2,0}(X_s)) \hookrightarrow H^2(X_{s_0}, \mathbb{C})) \end{array}$$

は正則写像であり、これが本来の周期写像である。

基本的なのは、Griffiths, (4) による次の可換図式である。

$$\begin{tikzcd} T_{s_0}(S) \arrow[r, "d\Phi_{s_0}"] \arrow[d, "\rho : \text{Kodaira - Spencer map}"] & T_{\Phi(s_0)}(S) \\ H^1(X_{s_0}, \Theta_{s_0}) \arrow[r, "\delta"'] & \mathrm{Hom}(H^0(X, \Omega^2_X), H^1(X, \Omega^1_X)) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

さて X を曲面とし、$(W, 0)$ をその Kuranishi space、$f : \mathcal{X} \to W$ を Kuranishi family ($f^{-1}(0) = X$) とする。さて一般に W は smooth ではないが、簡単のために smooth と仮定する。$\Phi : W \longrightarrow D$ を上の周期写像とする。Kodaira-Spencer map ρ_0 は単射

だから，次が言える。

$$d\Phi_0 : \text{単射} \iff \delta : \text{単射}.$$

$d\Phi_0$ の単射性より，モヂュライの座標が局所的に，周期によって，得られる事がわかる。この $d\Phi_0$ の単射性は，Kuranishi space が smooth という仮定のもとで，δ の単射性に帰着される。さらに δ の dual は

$$(*) \quad : \mu : H^0(X, \Omega^2_X) \otimes H^1(X, \Omega^1_X) \longrightarrow H^1(X, \Omega^1_X \otimes \Omega^2_X)$$

であり，この map はある意味で調べやすい。

3. 主定理の証明

$\varphi : X \longrightarrow C$ を主定理の仮定を満す楕円曲面とする。我々は，(*) における μ の全射性を言う。

さて Leray spectral sequence は，C が曲線であるから E_2-term で退化し，次の exact sequence を得る。

$$0 \longrightarrow H^1(C, \varphi_*\Omega^1_X) \longrightarrow H^1(X, \Omega^1_X) \longrightarrow H^0(C, R^1\varphi_*\Omega^1_X) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H^1(C, \varphi_*(\Omega^1_X \otimes \Omega^2_X)) \longrightarrow H^1(X, \Omega^1_X \otimes \Omega^2_X) \longrightarrow H^0(C, R^1\varphi_*(\Omega^1_X \otimes \Omega^2_X)) \longrightarrow 0$$

又

$$H^0(C, \varphi_*(\Omega^2_X)) \cong H^0(X, \Omega^2_X).$$

cup 積 μ (*) は，Leray spectral と両立するから，我々は，μ は次のように分解することができる。

$$\mu_1 : H^0(C, \varphi_* \Omega^2_X) \otimes H^1(C, \varphi_* \Omega^1_X) \longrightarrow H^1(C, \varphi_*(\Omega^1_X \otimes \Omega^2_X))$$

$$\mu_2 : H^0(C, \varphi_* \Omega^2_X) \otimes H^0(C, R^1\varphi_* \Omega^1_X) \longrightarrow H^0(C, R^1\varphi_*(\Omega^1_X \otimes \Omega^2_X))$$

よって μ の全射性は，μ_1 と μ_2 の全射性に帰着される．さて，少し，楕円曲面論を復習しよう．

命題 3.1　$\varphi : X \to C$ を主定理の ①，② を満す楕円曲面とする。次が成り立つ．

(i) $\varphi_* \mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_C$　(ii) $R^1\varphi_* \mathcal{O}_X$ は C 上 invertible．

($R^1\varphi_* \mathcal{O}_X = f$ と書く)　(iii) $\deg f = -\chi(\mathcal{O}_X)$

(iv) $\Omega^2_X \cong \varphi^*(\Omega^1_C \otimes f^\vee)$．

証明は，(2)．　　を見よ．

さて，次の命題が，本質的である。

命題 3.2　$\varphi : X \longrightarrow C$ を上と同じとする。

(I)　$J(X) \not\equiv \mathrm{const}$．ならば次が成り立つ。

(a)　$\varphi_* \Omega^1_X \cong \Omega^1_C$

(b)　$R^1\varphi_* \Omega^1_X \cong \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{T}_2$　($\mathcal{T}_2$ は torsion sheaf)

(II)　$J(X) \equiv \mathrm{const}.\ (\neq 0, 1)$ とする。次は exact。

$$0 \longrightarrow \Omega^1_C \longrightarrow \varphi_* \Omega^1_X \longrightarrow f \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \Omega^1_C \otimes f^\vee \longrightarrow R^1\varphi_* \Omega^1_X \longrightarrow \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{T}_1 \longrightarrow 0$$

$\mathcal{T}_1$ は torsion sheaf．

証明は割愛する。(cf. (8))

さて，命題3.2より，主定理がどのように得られるか述べよう。

(A)の時，命題3.1 (iv)，命題3.2より，μ_1, μ_2は，次で与えられる。

$$\mu_1 : H^0(\Omega^1_C \otimes f^\vee) \otimes H^1(C, \Omega^1_C) \longrightarrow H^1(C, \Omega^1_C \otimes \Omega^1_C \otimes f^\vee)$$

$$\mu_2 : H^0(\Omega^1_C \otimes f^\vee) \otimes H^0(C, \Omega^1_C) \longrightarrow H^0(\Omega^1_C \otimes f^\vee) \oplus H^0(\Omega^1_C \otimes f^\vee \otimes T_2)$$

$C \cong \mathbb{P}^1$, $\deg \Omega^1_C \otimes f^\vee = 0$ の時をのぞき，$H^1(C, \Omega^1_C \otimes \Omega^1_C \otimes f^\vee) = 0$.

(∵ 他の時は $\deg \Omega^1_C \otimes f^\vee > 0$)．しかるに，のぞいた場合は，$X$ が K-3 で明らか。

又 μ_2 は明らかに全射．

(B) (C) の時．Projection formula と命題3.2より μ_1 と μ_2 を分解する。

しかるに，μ_1 は明らかに全射になる。又，μ_2 の分解において，

$$\mu_2^1 : H^0(C, \Omega^1_C \otimes f^\vee) \otimes H^0(C, \Omega^1_C \otimes f^\vee) \longrightarrow H^0(C, (\Omega^1_C \otimes f^\vee)^{\otimes 2})$$

の全射性のみが問題．Mumford の定理より，$\deg \Omega^1_C \otimes f^\vee = 2g-2+\chi(\mathcal{O}_X) \geq 2g+1$ ならば μ_2^1 は全射．よって (C) をえる。

(B) の時は $C \cong \mathbb{P}^1$ より $\deg \Omega^1_C \otimes f^\vee \geq 0$ なので，μ_2^1 は全射．

(証明終り)

4. 結果をまとめておく。ここに書いてない結果は (8) を参照。

$\varphi : X \to C$ を minimal elliptic surface で multiple fibre をもたないとする。 $N = \chi(\Theta_X) = 1 - g(X) + p_g(X) \geq 0$ とおく

(I) $N \geq 1$. δ : Infinitesimal period map (定義1.1)

(a) $g(C) = 0$. X : not injective . O : injective

N	$p_g(X)$	J(X)	$\dim_C H^1(X, \Theta_X)$	δ	X
1	0		10	X	rational
2	1		20	O	K-3
≥ 3	N-1	not const.	11N - 3	O	
		const. $\neq$ 0,1.	11N - 3	O	
		=0,1.	?	?	

(b) $g(C) \geq 1$.

N	$p_g(X)$	J(X)	$\dim_C H^1(X, \Theta_X)$	δ
1 or 2	N+g-1	not const.	11N + 3g - 3	O
		const.	?	(?)*
≥ 3	N+g-1	not const.	11N + 3g-3	O
		const. $\neq$ 0,1.	11N + 4g-3	O
		= 0,1.	?	?

(II) $N = 0$ $p_g(X) = g(C)$

g(C)	$B^1(X)$	$\dim_C H^1(X, \Theta_X)$	C	δ	X
0	2	4		X	elliptic ruled
	1	4		X	Hopf
1	4	4		O	complex torus
	3	2		O	Kodaira
≥ 2	2g+2	4g-2	g(C) = 2 or non-hyperelliptic	O	
			g(C) > 2 and hyperelliptic	X	
	2g+1	4g-2		X	

5 小平曲面に対する Global Torelli Problem.

この§では，小平曲面に対して，モヂュライ空間の構成と周期写像について述べる。

定義 5.1　X を曲面とする。$\Omega_X^2 \cong \mathcal{O}_X$ かつ，$B^1(X)=3$ なる時，X を小平曲面と言う。

小平曲面に対しては，次の定理が基本的である。

定理 5.2　X を Kodaira 曲面とする。$\mathbb{C}^2$ の座標を (z_1, z_2) とする時，X は次の元で生成された群 Γ による商空間として構成される。

$$g_1 : (z_1, z_2) \longrightarrow \left(z_1,\ z_2 + \frac{\omega+\sqrt{-1}}{k}\right)$$

$$g_2 : (z_1, z_2) \longrightarrow \left(z_1,\ z_2 + \frac{\omega+\sqrt{-1}}{k}\tau\right)$$

$$g_3 : (z_1, z_2) \longrightarrow (z_1+1,\ z_2 + z_1)$$

$$g_4 : (z_1, z_2) \longrightarrow (z_1+\omega,\ z_2 - \sqrt{-1}\, z_1)$$

ここで，k は正整数，$\tau, \omega \in H = \{ \zeta \in \mathbb{C} ; \operatorname{Im} \zeta \}$ である。（小平（3））.

定義 5.3　$\Gamma(\tau, \omega, k)$ を上の g_1, g_2, g_3, g_4 で生成された，$\mathbb{C}^2$ のアファイン変換群とする。$X_{(\tau,\omega,k)} = \mathbb{C}^2/\Gamma(\tau,\omega,k)$. を type (τ, ω, k) の小平曲面と言う。又，k を小平曲面 $X_{(\tau,\omega,k)}$ の次数と言う。

小平曲面のモヂュライ空間については次がわかる。

定理5.4 k を正整数とする。$\mathcal{K}$ を次数 k の小平曲面のモヂュライ空間とする。

$$\mathcal{K} \cong H\times H \Big/ \begin{pmatrix}1 & \mathbb{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix} \times SL(2,\mathbb{Z}).$$

$$H = \{ z\in\mathbb{C} \,;\ \mathrm{Im}\, z>0\}.$$

さて小平曲面 X の 2nd cohomology の free part $H^2_{\mathbb{Z}} = H^2(X,\mathbb{Z})_{free}$ は rank 4 で、Hodge 構造は、次で与えられる。

$$H^2_{\mathbb{Z}}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C} \cong H^0(X,\Omega^2_X)\oplus H^1(X,\Omega^1_X)\oplus H^2(X,\mathcal{O}_X).$$

又、cup 積 P は、次のような intersection matrix で表わされる。

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$SO(P,H^2_{\mathbb{Z}}) = \{ a\in SL(H^2_{\mathbb{Z}}) \mid {}^t a P a = P\}$ とおく。

$SO(P,H^2_{\mathbb{Z}}) \cong SL(2,\mathbb{Z})\times SL(2,\mathbb{Z})$.

$$D = \left\{ (V \hookrightarrow H^2_{\mathbb{C}}) \in Gr(1,H^2_{\mathbb{C}}) \,;\ \begin{array}{l} {}^tVPV = 0 \\ {}^tVP\bar{V} > 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ [\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \,;\ \begin{array}{l} \lambda_1\lambda_4 - \lambda_2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1\bar{\lambda}_4 + \lambda_2\bar{\lambda}_3 + \lambda_3\bar{\lambda}_2 - \lambda_4\bar{\lambda}_1 > 0 \end{array} \right\}$$

は、小平曲面の 2nd-cohomology の偏極 Hodge 構造の分類空間（周期領域）.

$\Gamma = \bigcup_{(\tau,\omega)\in H\times H} \Gamma(\tau,\omega,k)$ は自然に $\mathbb{C}^2\times H\times H$ に作用し、

$\pi : \mathbb{C}^2\times H\times H/\Gamma \longrightarrow H\times H$ は、次数 k の小平曲面の smooth family で、すべての次数 k の小平曲面を fibre に含む。周期写像

$\Phi : H\times H \longrightarrow D$ が次のように与えられる。

$\Phi : (\tau,\omega) \longmapsto [1;\tau;\omega;\tau\omega]$. D には $SO(P,H_{\mathbb{Z}}^2)$ が、$H\times H$ には $SL(2,\mathbb{Z})\times SL(2,\mathbb{Z})$ が act しているが、Φ は、同型

$SL(2,\mathbb{Z})\times SL(2,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} SO(P,H_{\mathbb{Z}}^2)$ に関して同変的な同型

である事がわかる。すなわち、$\overline{\Phi} : H\times H/SL(2,\mathbb{Z})\times SL(2,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} D/SO(P,H_{\mathbb{Z}}^2)$.

一方、小平曲面のモヂュライ空間から $D/SO(P,H_{\mathbb{Z}}^2)$ への

周期写像 $\widetilde{\Phi} : H\times H/\begin{pmatrix}1 & \mathbb{Z}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\times SL(2,\mathbb{Z}) \longrightarrow D/SO(P,H_{\mathbb{Z}}^2)$ は、

$\overline{\Phi}$ を factor する。大域的なトレリの問題とは、$\widetilde{\Phi}$ が単射かを問うものである。以上をまとめると、次の定理をえる。

<u>定理 5.5</u>　小平曲面に対しては、周期写像 $\widetilde{\Phi}$ は、無限の写像度をもつ。すなわち、大域的トレリの定理はなりたたない。

(注)　小平曲面に対しては　局所トレリは成り立つ。

参考文献

1. Kodaira. K., "On compact analytic surfaces I", Ann. of Math., 77 (1960), 111-152.

2. ------------ , "On compact analytic surafces II, III", Ann. of Math., 77 (1963), 563-626, 78 (1963), 1-40.

3. ------------ , "On the structure of compact complex analytic surfaces, I", Amer. J. Math., 86 (1964), 751-798.

4. Griffiths. P., "Periods of integrals on algebraic manifolds I, II", Amer. J. Math., 90 (1968), 586-626, 805-865.

5. ------------ , "Periods of integrals on algebraic manifolds III", Publ. Math. I. H. E. S., 38 (1970), 125-180.

6. Chakiris. K. A Torelli theorem for simply connected elliptic surface with a section and $p_g \geqq 2$. Bulltein of the Amer. Math. Soc. Vol 7 July 1982. 227 ~ 232

7. KiY; K.I. The local Torelli theorem for varieties with divisible canonical class, Izv. Akad. Nauk 42 (1978) English transl. (1978) No 1.

8. Saito Ma. On the Infinitesimal Torelli ploblem of elliptic surfaces. (to appear). J. Math. Kyoto Univ.